

CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ „EUCLID”

Focşani, 19 noiembrie 2016

Clasa a VII – a

SUBIECTUL I

a) Calculați $E_1 = \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{-3}\right)^2 - \left(\frac{-2^2}{3^2}\right) + (-2)^2\right]^3 : \left[\left(-\frac{5}{6}\right)^3 - (-1)^3 - 1\right]$.

b) Calculați

$E_2 = 2\cdot(-1)^{2\cdot k} + 3\cdot(-1)^{2\cdot k+1} + 4\cdot(-1)^{2\cdot k+2} + \ldots + 2017\cdot(-1)^{2\cdot k+2015}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Simplificați fracția: $\frac{15\cdot 4^{1003} + 28\cdot 8^{668}}{2^2\cdot 8^{668} + 8\cdot 4^{1004}}$.

SUBIECTUL II

a) Să se determine numărul de elemente al mulțimii

$$A = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,\middle|\, \frac{2}{3} < \frac{n}{7} < \frac{12}{5} < \frac{25}{m+n} < \frac{17}{5}\right\}.$$

b) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuația:

$$\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{7} + \ldots + \frac{x+2016}{2020} = \frac{2016^2}{2015}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2015\cdot 2016}\right).$$

SUBIECTUL III

Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ şi $D - E - F - A$, iar $G, H \in (BC)$ astfel încât $[DE] \equiv [CG]$, $[EF] \equiv [GH]$ şi $[FA] \equiv [HB]$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $AG \cap BE = \{N\}$ şi $AH \cap BF = \{P\}$. Demonstrați că O, N, P sunt coliniare.

Timp de lucru: 2 ore

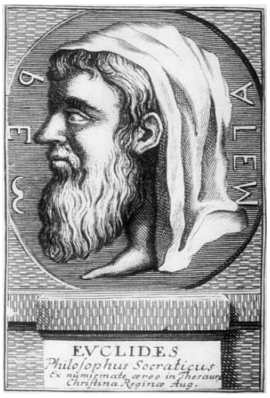
Se acordă 1 p din oficiu pentru fiecare subiect

Subiecte propuse de:

Profesor Romeo ZAMFIR, Colegiul Național „Vasile Alecsandri” Galați

Informații despre concurs găsiți la *https://concurseuclidfocsani.wordpress.com*

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „EUCLID”
Focşani, 19 noiembrie 2016



Clasa a VII – a

Soluţii şi barem de corectare

Notă: *Fiecare dintre subiectele I, II şi III primeşte câte 1 p din oficiu*

SUBIECTUL I

a) Calculați $E_1 = \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{-3}\right)^2 - \left(\frac{-2^2}{3^2}\right) + (-2)^2\right]^3 : \left[\left(-\frac{5}{6}\right)^3 - (-1)^3 - 1\right]$.

b) Calculați

$E_2 = 2\cdot(-1)^{2\cdot k} + 3\cdot(-1)^{2\cdot k+1} + 4\cdot(-1)^{2\cdot k+2} + \ldots + 2017\cdot(-1)^{2\cdot k+2015}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Simplificați fracția: $\frac{15\cdot 4^{1003} + 28\cdot 8^{668}}{2^2\cdot 8^{668} + 8\cdot 4^{1004}}$.

SOLUȚIE

a) $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{-3}\right)^2 - \left(\frac{-2^2}{3^2}\right) + (-2)^2\right]^3 = 5^3$ ... 1p

$\left(-\frac{5}{6}\right)^3 - (-1)^3 - 1 = -\frac{5^3}{6^3}$ ... 1p

$E_1 = -6^3 = -216$ ... 1p

b) $E_2 = 2 - 3 + 4 - \ldots + 2016 - 2017$ ... 1p

$= \underbrace{-1-1-\ldots-1}_{de\,1008\,ori}$ ... 1p

$= -1008$ ... 1p

c) Folosind proprietățile puterilor obținem

$\frac{15\cdot 4^{1003} + 28\cdot 8^{668}}{2^2\cdot 8^{668} + 8\cdot 4^{1004}} = \frac{15\cdot\left(2^2\right)^{1003} + 28\cdot\left(2^3\right)^{668}}{2^2\cdot\left(2^3\right)^{668} + 8\cdot\left(2^2\right)^{1004}}$ ... 1p

$= \frac{15\cdot 2^{2006} + 7\cdot 2^2\cdot 2^{2004}}{2^2\cdot 2^{2004} + 2^3\cdot 2^{2008}}$ ... 1p

$= \frac{2^{2006}\cdot(15\cdot +7)}{2^{2006}(1+2^5)} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$ ... 1p

SUBIECTUL II

a) Să se determine numărul de elemente al mulțimii

$$A=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{2}{3}<\frac{n}{7}<\frac{12}{5}<\frac{25}{m+n}<\frac{17}{5}\right\}.$$

b) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Q}$ ecuația:

$$\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\ldots+\frac{x+2016}{2020}=\frac{2016^2}{2015}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot 2016}\right).$$

SOLUȚIE

a) Avem că $\frac{2}{3}<\frac{n}{7}\Leftrightarrow 14<3\cdot n$, deci $n\geq 5$ şi $\frac{n}{7}<\frac{12}{5}\Leftrightarrow 5\cdot n<84$, deci $n\leq 16$. Prin urmare, $5\leq n\leq 16$. ... 1p

Notăm cu $s=m+n$. Analog, din inegalitățile $\frac{12}{5}<\frac{25}{m+n}<\frac{17}{5}\Leftrightarrow\frac{12}{5}<\frac{25}{x}<\frac{17}{5}$ obținem $8\leq s\leq 10$, adică $8\leq m+n\leq 10$. ... 1p

Am obținut condițiile $5\leq n\leq 16$ şi $8\leq m+n\leq 10$.

Dacă $n=5$, atunci $m=3,\ 4$ sau 5.

Dacă $n=6$, atunci $m=2,\ 3$ sau 4.

Dacă $n=7$, atunci $m=1,\ 2$ sau 3.

Dacă $n=8$, atunci $m=0,\ 1$ sau 2. ... 1p

Dacă $n=9$, atunci $m=0$ sau 1.

Dacă $n=10$, atunci $m=0$.

Dacă $n\in\{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16\}$, atunci nu există m care să verifice inegalitatile anterioare.

Prin urmare, mulțimea A are 15 elemente. ... 1p

b) Avem că

$$\frac{2016^2}{2015}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot 2016}\right)$$

$$=\frac{2016^2}{2015}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2015\cdot 2016}\right)$$ ... 1p

$$=\frac{2016^2}{2015}\cdot\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}++\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2016}\right)$$

$$=\frac{2016^2}{2015}\cdot\left(1-\frac{1}{2016}\right)=\frac{2016^2}{2015}\cdot\frac{2015}{2016}=2016,$$

de unde rezultă că ecuația devine

$$\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\ldots+\frac{x+2016}{2020}=2016.$$ ... 1p

Ultima relație este echivalentă cu

$$\frac{x+1}{5}-1+\frac{x+2}{6}-1+\frac{x+3}{7}-1+\ldots+\frac{x+2016}{2020}-1=0,$$

adică $\frac{x-4}{5}+\frac{x-4}{6}+\frac{x-4}{7}+\ldots+\frac{x-4}{2020}=0$, ... 1p

de unde obținem că $(x-4)\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2020}\right)=0$. ... 1p

Cum al doilea factor al produsului nu poate fi 0, rezultă că $x-4=0$.
Prin urmare, singura soluție a ecuației este $x=4$. ... 1p

SUBIECTUL III

Se consideră trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB > CD$ şi $D-E-F-A$, iar $G, H \in (BC)$ astfel încât $[DE] \equiv [CG]$, $[EF] \equiv [GH]$ şi $[FA] \equiv [HB]$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$, $AG \cap BE = \{N\}$ şi $AH \cap BF = \{P\}$. Demonstrați că O, N, P sunt coliniare.

SOLUȚIE

Fie $AD \cap BC = \{M\}$.

$ABCD$ - trapez isoscel $\Rightarrow D\hat{A}B \equiv C\hat{B}A$

$AB \parallel CD \Rightarrow D\hat{A}B \equiv M\hat{D}C$

$C\hat{B}A \equiv M\hat{C}D$,

de unde $M\hat{D}C \equiv M\hat{C}D$,

adică ΔMDC este isoscel ... 3p

$\Delta DAB \equiv \Delta CBA$ (LLL) ... 1p

$\Rightarrow B\hat{A}C \equiv A\hat{B}D \Rightarrow \Delta OAB$ isoscel, de unde $[OA] \equiv [OB]$ ... 1p

ΔMDC este isoscel $\Rightarrow [MD] \equiv [MC]$

Cum $[AD] \equiv [BC]$, rezultă că $[MA] \equiv [MB]$ ... 1p

$\Delta MOA \equiv \Delta MOB$ (LLL) ... 1p

$\Rightarrow A\hat{M}O \equiv B\hat{M}O \Rightarrow O$ se află pe bisectoarea $A\hat{M}B$ ... 1p

Analog se arată că N şi P se află pe bisectoarea $A\hat{M}B$ ... 1p